ENSA d'Al-Hoceima
AP-II, Deuxième Année,
Probabilité & Statistique,

Année 2019/2020
Semestre 4
TD2

Solution de la Série N^{o}2 : Espace de probabilité et probabilité conditionnelle

N,B : Il faut d'abord lire le cours et enseuite travailler les exercices et en comparant avec les propriétés du cours

Exercice 1

On a demandé à 200 lycéens de donner leur activité la plus prenante en temps, en dehors du travail scolaire

1. Compléter le tableau 1 des effectifs par les effectifs à la marge.

activité	Première	Seconde	Bac	Total
M : musique	14	22	24	
D : discussion	3	11	16	
S : sport	15	18	17	
A : autres	16	21	23	
Total				200

2. Établir les tableaux des fréquences en lignes 2 et en colonnes 3

activité	Première	Seconde	Bac	Total
M : musique				
D : discussion				
S : sport				
A : autres				
Total				2

activité	Première	Seconde	Bac	Total
M : musique				
D : discussion				
S : sport				
A : autres				
Total				

3. Vérifier si chacune des phrases suivantes est vraie. (On donnera une justification.)
   (a) 25 % des élèves de Seconde pratiquent un sport :
   (b) 36 % des élèves pratiquant un sport sont en Seconde :
   (c) 20 % des 40 % des élèves en Bac aiment discuter :
   (d) enviro 53 % des élèves du Bac aiment discuter :
   (e) 7 % des lycéens sont en Première et aiment la musique :
   (f) 30 % des 24 % d'élèves de Première pratiquent un sport :

Solution : 200 lycéens ont été demandés de donner leur activité la plus prenante en temps, en dehors du travail scolaire

1. Voir que le tableau 1 des effectifs par les effectifs à la marge a été complété.
2. Voir les tableaux des fréquences en lignes (2) et en colonnes (3)
3. Vérifier si chacune des phrases suivantes est vraie. (On donnera une justification.)

activité	Première	Seconde	Bac	Total
M : musique	14	22	24	60
D : discussion	3	11	16	30
S : sport	15	18	17	50
A : autres	16	21	23	60
Total	48	72	80	200

(2)	Première	Seconde	Bac	Total
M : musique	$\frac{14}{60} = 0.2333$	$\frac{22}{60} = 0.3667$	$\frac{24}{60} = 0.4$	1
D : discussion	$\frac{3}{30} = 0.1$	$\frac{11}{30} = 0.3667$	$\frac{16}{30} = 0.5333$	1
S : sport	$\frac{15}{50} = 0.3$	$\frac{18}{50} = 0.36$	$\frac{17}{50} = 0.34$	1
A : autres	$\frac{16}{60} = 0.2667$	$\frac{21}{60} = 0.35$	$\frac{23}{60} = 0.3833$	1
Total	$\frac{48}{200} = 0.24$	$\frac{72}{200} = 0.36$	$\frac{80}{200} = 0.4$	1

(3)	Première	Seconde	Bac	Total
M : musique	$\frac{14}{48} = 0.2917$	$\frac{22}{72} = 0.3056$	$\frac{24}{80} = 0.3$	$\frac{60}{200} = 0.3$
D : discussion	$\frac{3}{48} = 0.0625$	$\frac{11}{72} = 0.1528$	$\frac{16}{80} = 0.2$	$\frac{30}{200} = 0.15$
S : sport	$\frac{15}{48} = 0.3125$	$\frac{18}{72} = 0.25$	$\frac{17}{80} = 0.2125$	$\frac{50}{200} = 0.25$
A : autres	$\frac{16}{48} = 0.3333$	$\frac{21}{72} = 0.2917$	$\frac{23}{80} = 0.2875$	$\frac{60}{200} = 0.3$
Total	1	1	1	1

(a) 25 % des élèves de Seconde pratiquent un sport : la phrase est corrècte car d'après le Tableau (3) (Ligne "Sport" et Colonne "Seconde") on a $0.25 \times 100 = 25\%$.

(b) 36 % des élèves pratiquant un sport sont en Seconde : la phrase est corrècte car d'après le Tableau (2) (Ligne "Sport" et Colonne "Seconde") on a $0.36 \times 100 = 36\%$.

(c) 20 % des 40 % des élèves en Bac aiment discuter : la phrase est corrècte car d'après le Tableau (3) (Ligne "Discussion" et Colonne "Bac") on a $0.2 \times 100 = 20\%$ où bien $0.2 \times 0.4 \times 200 = 16$.

(d) enviro 53 % des élèves du Bac aiment discuter : la phrase est fausse car on a $0.53 \times 80 = 42 \neq 16$; mais 53% des élèves qui aiment discuter sont en Terminale.

(e) 7 % des lycéens sont en Première et aiment la musique : la phrase est corrècte car d'après le Tableau (1) (Ligne "Musique" et Colonne "Première") on a $\frac{14}{200} \times 100 = 7\%$.

(f) 30 % des 24 % d'élèves de Première pratiquent un sport : la phrase est fausse car on a $0.3 \times 0.24 \times 48 = 3.456 \neq 15$. Mais 30 % des 24 % d'élèves en Seconde pratiquent un sport.

$\square$

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires qui peuvent prendre chacune les valeurs 1 et 0, les probabilités respectives des couples de valeurs de X et Y étant données par le tableau ci-dessous :

Y \ X	1	0
1	p	$\frac{1}{2}-p$
0	$\frac{1}{3}-p$	$\frac{1}{6}+p$

où p est un nombre réel.

1. Dans quel intervalle doit se trouver le nombre p pour que ces données soient acceptables ?.
2. Calculer les probabilités des valeurs de X et Y.
3. Calculer les espérances mathématiques et les écarts-types de X et Y.
4. Calculer p de façon que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes.

Solution :

1. Les valeurs du tableau sont des nombres probabilistes, alors les données sont acceptables si

$$\left\{\begin{array}{c} 0 \leq p \leq 1 \\ 0 \leq \frac{1}{2}-p \leq 1 \\ 0 \leq \frac{1}{3}-p \leq 1 \\ 0 \leq \frac{1}{6}+p \leq 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} 0 \leq p \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \leq p \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \leq p \leq \frac{5}{6} \end{array}\right.$$

   donc les données sont acceptable si et seulement si $p \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \cap [-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}] \cap [-\frac{1}{6}; \frac{5}{6}] \cap [0; 1]$; d'où $p \in [0; \frac{1}{3}]$.

2. Soit Ω l'univers, soit $X : \Omega \to \{0; 1\}$ et $Y : \Omega \to \{0; 1\}$ deux variables aléatoires, alors calculons $P([X = 0])$, $P([X = 1])$, $P([Y = 0])$ et $P([Y = 1])$; pour cela on a

$$\Omega = [X = 0] \cup [X = 1] \quad \text{et} \quad \Omega = [Y = 0] \cup [Y = 1]$$

   avec $[X = 0] \cap [X = 1] = \emptyset$ et $[Y = 0] \cap [Y = 1] = \emptyset$. On a

$$\begin{array}{rcl} [X = 0] & = & [X = 0] \cap \Omega = [X = 0] \cap ([Y = 0] \cup [Y = 1]) \\ & = & = ([X = 0] \cap [Y = 0]) \cup ([X = 0] \cap [Y = 1]) \\ & = & [(X, Y) = (0, 0)] \cup [(X, Y) = (0, 1)] \end{array}$$

   comme $[(X, Y) = (0, 0)] \cap [(X, Y) = (0, 1)] = \emptyset$, alors

$$P([X = 0]) = P([(X, Y) = (0, 0)]) + P([(X, Y) = (0, 1)]) = \frac{1}{6} + p + \frac{1}{2} - p = \frac{4}{6}$$

   d'où $P([X = 0]) = \frac{2}{3}$. De la même façon, on a

$$\begin{array}{rcl} [X = 1] & = & [X = 1] \cap \Omega = [X = 1] \cap ([Y = 0] \cup [Y = 1]) \\ & = & ([X = 1] \cap [Y = 0]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 1]) \\ & = & [(X, Y) = (1, 0)] \cup [(X, Y) = (1, 1)] \end{array}$$

   comme $[(X, Y) = (1, 0)] \cap [(X, Y) = (1, 1)] = \emptyset$, alors

$$P([X = 1]) = P([(X, Y) = (1, 0)]) + P([(X, Y) = (1, 1)]) = \frac{1}{3} - p + p$$

   d'où $P([X = 1]) = \frac{1}{3}$. De la même façon, on a

$$\begin{array}{rcl} [Y = 0] & = & [Y = 0] \cap \Omega = [Y = 0] \cap ([X = 0] \cup [X = 1]) \\ & = & = ([Y = 0] \cap [X = 0]) \cup ([Y = 0] \cap [X = 1]) \\ & = & [(X, Y) = (0, 0)] \cup [(X, Y) = (1, 0)] \end{array}$$

comme $[(X,Y)=(0,0)]\cap[(X,Y)=(1,0)]=\emptyset$, alors

$$P([Y=0])=P([(X,Y)=(0,0)])+P([(X,Y)=(1,0)])=\frac{1}{6}+p+\frac{1}{3}-p$$

d'où $P([Y=0])=\frac{1}{2}$. De la même façon, on a

$$\begin{aligned}[Y=1] &= [Y=1]\cap\Omega=[Y=1]\cap([X=0]\cup[X=1])\\ &= =([Y=1]\cap[X=0])\cup([Y=1]\cap[X=1])\\ &= [(X,Y)=(0,1)]\cup[(X,Y)=(1,1)]\end{aligned}$$

comme $[(X,Y)=(0,1)]\cap[(X,Y)=(1,1)]=\emptyset$, alors

$$P([Y=1])=P([(X,Y)=(0,1)])+P([(X,Y)=(1,1)])=\frac{1}{2}-p+p$$

d'où $P([Y=1])=\frac{1}{2}$.

3. Calculons les espérances mathématiques et les écarts-types de X et Y :

$$\mathbb{E}(X)=1*P([X=1])+0*P([X=0])=P([X=1])=\frac{1}{3},$$

$$\mathbb{E}(Y)=1*P([Y=1])+0*P([Y=0])=P([Y=1])=\frac{1}{2},$$

d'après la propriété de Hygens, on a la variance $\sigma^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2$ alors

$$\sigma^2(X)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$$

d'où l'écart-type de X est $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot$ De même, on a

$$\sigma^2(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-(\mathbb{E}(Y))^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

d'où l'écart-type de Y est $\sigma(Y)=\frac{1}{2}\cdot$

4. Calculons p tel que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes : X et Y soient indépendantes si et seulement si

$$P([X=k]\cap[Y=\ell])=P([X=k])*P([Y=\ell]),\quad\forall(k,\ell)\in J_X\times J_Y$$

où $J_X=J_Y=\{0;1\}$.

– Pour $k=\ell=1$, on a

$$p=P([(X,Y)=(1,1)])=P([X=1]\cap[Y=1])=P([X=1])*P([Y=1])=\frac{1}{3}*\frac{1}{2}$$

donc $p=\frac{1}{6}\cdot$

– Pour $k=\ell=0$, on a

$$\frac{1}{6}+p=P([(X,Y)=(0,0)])=P([X=0]\cap[Y=0])=P([X=0])*P([Y=0])=\frac{2}{3}*\frac{1}{2}$$

donc $p=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$, soit $p=\frac{1}{6}$.

– On peut de la même manière discuter les cas ($k=0$ et $\ell=1$), puis ($k=1$ et $\ell=0$) et on trouvera toujours $p=\frac{1}{6}$.

$\square$

Exercice 3
On considère deux urnes C_1 et C_2 contenant des boules rouges et des boules blanches. Dans l'urne C_1, la probabilité de tirer une boule rouge est 0.9; dans l'urne C_2, elle est 0.2.
On choisit au hasard (c'est-à-dire avec des probabilités égales) une urne, et on en tire une boule. On constate que la boule tirée est rouge;
*Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne C_1 ?

Solution : On note par
E l'ensemble des tirages possibles,
C_1 l'ensemble des tirages de l'urne C_1
C_2 l'ensemble des tirages de l'urne C_2
alors $E = C_1 \cup C_2$ une boule est tirée de l'urne C_1 ou de l'urne C_2
$C_1 \cap C_2 = \emptyset$ aucune boule n'est tirée des deux urnes à la fois. On désigne par A l'ensemble des tirages donnant une boule rouge, alors on a les données suivantes :
$P_{C_1}(A) = 0.9$ est la probabilité de tirer une boule rouge de C_1,
$P_{C_2}(A) = 0.2$ est la probabilité de tirer une boule rouge de C_2,
$P(C_1) = P(c_2) = 0.5$

1. La probabilité pour que la boule rouge provienne de l'urne C_1 est $P_A(C_1)$: D'après la formule de Bayes on a

$$P_A(C_1) = \frac{P(C_1) * P_{C_1}(A)}{P(C_1) * P_{C_1}(A) + P(C_2) * P_{C_2}(A)} = \frac{0.5 * 0.9}{0.5 * 0.9 + 0.5 * 0.2} = \frac{9}{11}.$$

2. La probabilité pour que la boule rouge provienne de l'urne C_2 est $P_A(C_2)$: D'après la formule de Bayes on a

$$P_A(C_2) = \frac{P(C_2) * P_{C_2}(A)}{P(C_1) * P_{C_1}(A) + P(C_2) * P_{C_2}(A)} = \frac{0.5 * 0.2}{0.5 * 0.9 + 0.5 * 0.2} = \frac{2}{11}.$$

Remarque : on peut remarquer que

$$P_A(C_1) + P_A(C_2) = \frac{9}{11} + \frac{2}{11} = 1$$

$\square$

Exercice 4
Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

1. Démontrer que $P_B(A) = \frac{P(A) - P(\overline{B}) P_{\overline{B}}(A)}{P(B)}$.
2. Une population peut être atteinte par deux maladies A et B. Une étude statistique révèle que :
   – la probabilité pour une personne d'être atteinte par A est 0.2, celle d'être atteinte par B est 0.3;
   – la probabilité pour une personne n'étant pas atteinte par B de l'être par A est 0.1.
   (a) Calculer la probabilité pour une personne atteinte par B de l'être aussi par A.
   (b) Les maladies A et B frappent-elles indépendamment les individus de la population ?

Solution : Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

1. Montrons que $P_B(A) = \frac{P(A) - P(\overline{B}) P_{\overline{B}}(A)}{P(B)}$: on a

$$A = \Omega \cap A = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

avec $(A \cap B)$ et $(A \cap \bar{B})$ sont 2 événements disjoints ; alors

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ &= P_B(A)\,P(B) + P_{\bar{B}}(A)\,P(\bar{B}) \end{aligned}$$

d'où $P(A) - P_{\bar{B}}(A)\,P(\bar{B}) = P_B(A)\,P(B)$,
finalement

$$P_B(A) = \frac{P(A) - P_{\bar{B}}(A)\,P(\bar{B})}{P(B)}.$$

2. Soit $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.7$ et $P_{\bar{B}}(A) = 0.1$
   (a) La probabilité pour une personne atteinte par B de l'être aussi par A est $P_B(A)$

   $$P_B(A) = \frac{P(A) - P_{\bar{B}}(A)\,P(\bar{B})}{P(B)} = \frac{0.2 - 0.7 \times 0.1}{0.3} = \frac{13}{30}$$

   (b) On a $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = 0.3 \times \frac{13}{30} = \frac{13}{100} = 0.13$ et $P(A) \times P(B) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$,
   comme $0.06 \neq 0.13$ alors $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$; ce qui prouve que Les maladies A et B ne frappent pas indépendamment les individus de la population.

□

Exercice 5

Par une journée particulière de l'année, on a observé que la probabilité de subir un orage est de 10% et que la probabilité de voir un éclair est de 30%. On sait que, si l'on observe un éclair, la probabilité qu'il pleuve est de 50%.

1. Estimer la probabilité d'expérimenter à la fois un éclair et un orage durant cette journée.
2. Estimer cette même probabilité dans le cas de deux événements indépendants.

Solution : On note par $A = [X = \text{Observé un éclair}]$ et $B = [X = \text{Observé un orage}]$; on a les données suivantes

$$P(A) = \frac{30}{100} = 0.3, \quad P(B) = \frac{10}{100} = 0.1 \quad \text{et} \quad P_A(B) = \frac{50}{100} = 0.5$$

1. La probabilité d'expérimenter à la fois un éclair et un orage durant cette journée est

$$P(A \cap B) = P_A(B) * P(A) = 0.5 * 0.3 = 0.15$$

2. Si les deux événements indépendants sont indépendants, alors la propbabilité d'observer la pluie qu'il y a un éclair ou non est de 0.1 soit un pourcentage de 10%, c'est à dire que $P_A(B) = P(B) = 0.1$; d'où

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = 0.3 * 0.1 = 0.03.$$

□

Exercice 6

Une personne I_0 transmet à une personne I_1 un message qui se résume à **oui** ou **non** ; I_1 transmet le message à I_2 qui le transmet à I_2 qui le transmet à I_3, et ainsi de suite jusqu'à I_{r+1} (les personnes $I_0, I_1, \ldots, I_{r+1}$ sont toutes différentes).
On admet que les probabilités que la personne I_n $(n = 1, 2, \ldots, r)$ transmette le message reçu de I_{n-1} ou le message opposé sont p et $q = 1-p$; on désigne par $\phi(n)$ la probabilité que I_n transmette le message exact (transmis par I_0).

1. Établir une relation de récurrence entre $\phi(n)$ et $\phi(n-1)$.
2. Étudier la suite $u_n = \phi(n)$.

3. Calculer la valeur numérique de $u_{10} = \phi(10)$ si $p = 0.9$.
4. Pour $p = 0.7$.
   (a) Donner un tableau montrant les calculs de valeurs de u_n pour $n = 0, 1, \ldots, 10$.
   (b) On considère la fonction $x \in [0, +\infty[\to \phi(x)$. Calculer $\phi(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x)$, que peut-on déduire ?
   (c) Dans un même repère $(O; i, j)$, tracer la courbe (C) de la fonction $x \mapsto \phi(x)$, ainsi que les valeurs de la suite $(u_n)_{0\leq n\leq 10}$ par une couleur différente. (*Choisir l'échelle convenable*)
5. Conclure.

Solution :

1. La relation de récurrence entre $\phi(n)$ et $\phi(n-1)$: on a $I_0 = I_{n-1} \cup \overline{I_{n-1}}$, alors
$$I_n = I_0 \cap I_n = (I_n \cap I_{n-1}) \cup (I_n \cap \overline{I_{n-1}})$$
donc
$$\begin{array}{rcl} P(I_n) & = & P(I_n \cap I_{n-1}) + P(I_n \cap \overline{I_{n-1}}) \\ & = & P(I_{n-1})\, P_{I_{n-1}}(I_n) + P(\overline{I_{n-1}})\, P_{\overline{I_{n-1}}}(I_n) \end{array}$$
donc $\phi(n) = \phi(n-1)\, P_{I_{n-1}}(I_n) + (1 - \phi(n-1))\, P_{\overline{I_{n-1}}}(I_n)$,
or $P_{I_{n-1}}(I_n) = p$ et $P_{\overline{I_{n-1}}}(I_n) = 1 - p$, alors
$$\phi(n) = \phi(n-1)\, p + (1 - \phi(n-1))\,(1-p)$$
d'où la relation de récurrence suivante : $\phi(n) = q + (p-q)\phi(n-1)$.
2. Soit la suite $u_n = \phi(n)$, alors $u_n = q + (p-q)u_{n-1}$.
Si la suie $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers x, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = x$, donc $x = q + (p-q)x$ soit $x = \frac{1}{2}$; on pose $w_n = u_n - \frac{1}{2}$, alors
$$\begin{array}{rcl} u_n - \dfrac{1}{2} & = & q + (p-q)u_{n-1} - \dfrac{1}{2} \\ & = & q - \dfrac{1}{2} + (1-2q)u_{n-1} \\ & = & 1 - p - \dfrac{1}{2} + 2\left(\dfrac{1}{2} - 1 + p\right) u_{n-1} \\ & = & \dfrac{1}{2} - p + 2\left(p - \dfrac{1}{2}\right) u_{n-1} \\ & = & \left(p - \dfrac{1}{2}\right)(2u_{n-1} - 1) \\ & = & 2\left(p - \dfrac{1}{2}\right)\left(u_{n-1} - \dfrac{1}{2}\right) \end{array}$$
donc $w_n(2p-1)w_{n-1}$ pour tout $n \geq 0$; on pose $\mathrm{r} = 2p-1$, alors la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison r et donc la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $-1 < \mathrm{r} < 1$.
Or $0 < p < 1$ alors $0 \leq 2p \leq 2$, donc $-1 \leq 2p - 1 \leq 1$, d'où $-1 < \mathrm{r} < 1$ ce qui prouve que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$, ceci car $w_n = (2p-1)^n w_0$ avec $w_0 = u_0 - \frac{1}{2} = P(I_0) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot$ Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.
3. La valeur numérique de $u_{10} = \phi(10)$ si $p = 0.9$:
on a $w_n = (2p-1)^n w_0$, alors $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$; donc $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 \times 0.9 - 1)^n$ pour $p = 0.9$, soit pour $n = 10$, on obtient
$$u_{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1.8-1)^{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0.8^{10} = 0.5537.$$

Table 1 – Les variables aléatoires X et Y

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	0.7	0.58	0.532	0.5128	0.5051	0.502	0.5008	0.5003	0.5001	0.5001

4. On prend $p = 0.7$.
   (a) Le tableau de calcul de valeurs de u_n pour $n = 0, 1, \dots, 10$: on a $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^n$
   (b) On considère la fonction $x \in [0, +\infty[\to \phi(x)$, la fonction $\phi(x) = 0.5 + 0.5 * e^{x \ln(0.4)}$, alors $\phi(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = 0.5$; on en déduit qu'à l'infini les deux messages **oui** et **non** ont la même probabilité d'être transmis.
   (c) Pour la courbe (C) de la fonction $x \mapsto \phi(x)$ et les valeurs de la suite $(u_n)_{0 \leq n \leq 10}$ par une couleur différente, voir la Figure 1.

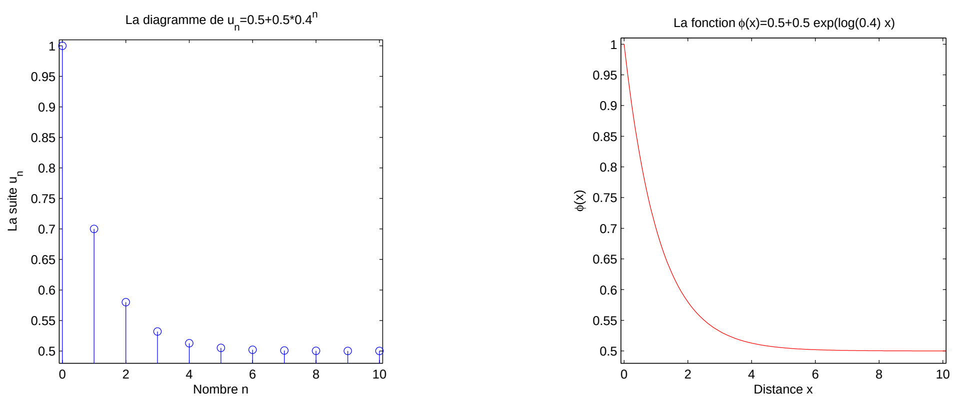

Figure 1 – Les courbes de $\phi(x) = 0.5 + 0.5 * e^{x \ln(0.4)}$

5. Conclusion : La probabilité que le message transmis soit correct ne dépasse plus 0.5.

$\square$

Exercice 7

Un circuit électronique est composé de 10 blocs identiques en série ; chacun de ces blocs peut être formé d'un élément unique ou de deux éléments identiques en parallèle (il suffit alors qu'un des deux éléments fonctinne pour que le bloc fonctionne). On admet que chaque élément a une probabilité égale à 0.02 de tomber en panne pendant les 5000 premières heures de fonctionnement et que les pannes des divers éléments sont des événements indépendants.
Calculer les probabilités P_1 et P_2 d'une panne du circuit pendant les 5000 premières heures de fonctionnement :

1. si chaque bloc est formé d'un seul élément.
2. si chaque bloc est formé de deux éléments.

Solution : Calculons les probabilités P_1 et P_2 d'une panne du circuit pendant les 5000 premières heures de fonctionnement : on désigne par A_i l'événement le $i^{\text{ème}}$ bloc fonctionne pendant 5000 heures.
Soit A l'événement le circuit tout entier fonctionne pendant 5000 heures ; $\overline{A}$ l'événement le circuit tombe en panne, c'est-à-dire que $\overline{A} = \complement_{\Omega}^{A}$ est le complémentaire de A dans l'univers Ω.
Le circuit fonctionne si chacun des blocs fonctionne, c'est-à-dire si chacun des événements A_i est réalisé :

$$A = \bigcap_{i=1}^{10} A_i$$

Par hypothèse, on sait que les événements A_i sont indépendants, alors

$$P(A) = \prod_{i=1}^{10} P(A_i) = p^{10}$$

où p désigne la valeur commune des probabilités $P(A_i)$ pour $1 \leq i \leq 10$.

1. si chaque bloc est formé d'un seul élément, alors $p = 1 - 0.02 = 0.98$; donc $P(A) = 0.98^{10} = 0.817$
   d'où $P_1 = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.817 = 0.183$.
2. si chaque bloc est formé de deux éléments en parallèle, alors un bloc tombe en panne si chacun des 2 éléments tombe en panne ; la probabilité d'une panne pour un bloc est $P(A_i) = 0.02^2$; alors dans ces conditions on a $p = 1 - 0.02^2 = 0.9996$; donc $P(A) = 0.9996^{10} = 0.9961$
   d'où $P_1 = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.9961 = 0.0.0039$.

Remarque : On notera combien le second montage a accru la sécurité de fonctionnement (la fiablité) du matériel ; mais le coût de fabrication est plus considérable. On choisira l'une ou l'autre des solutions en fonction des conditions d'emploi du matériel. □